

GEOMETRIA SOLIDORUM,
SIVE

MATERIÆ; $\frac{537.12.2}{2}$

SEU

De Varia Compositione, Progressio-
ne, Rationeque VELOCITATUM.

Unde oritur

METHODUS BREVIS & LUCULENTA,

QUA

QUADRATURÆ ferè Omnium Curvilinearium
Definitis Numeris Expediantur, quomodo & olim
absolutos suos sortita est

PARABOLA.

ROBERTO GREEN, A. M. Aulæ
CLARENSIS Socio.

CANTABRIGIÆ:

TYPIS ACADEMICIS.

Impensis EDM. JEFFERY, Bibliopolæ Cantabr.

MDCXCII.

ROMANA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

LIBRARI

ITALICA

E

C

lii

culi

ven

the

loqu

tion

an

Lit

aut

nost

cu/a

nelle

ver

Geo

I

pac

ate

faci

Scie

uoa

Car

Dug

vit

fiu

Rap

ana

uit

PRÆFATIO.

QUOD de Lucilio Poetâ Memoriam traditum apud Ciceronem constat, dixisse eum, cum Scipionis atque Rutilii iudicium reformidaret, Tarentinis & Siculis se scripsisse, id multò magis nobis convenire forsàn videbitur, qui populum Mathematicum potius, vulgato etiam sermone, alloqueremur, quàm Viros omnifariâ Eruditione Expolitos, Mathematicos velim Britanniae Illustres, summum Europæ totiusque Literati Orbis Decus & Ornamentum; sin autem Veritate & Mathefi existimationem nostram posteriorem duxerimus, facilis est excusatio, cur Hos potissimum Iudices comellem, quibus nec æquiores, uti spero, optaverit, quicquid erravimus, nec severiores Geometria.

In illorum laude erit ponendum, quod Gens hæc, communis nostrum Patria charissima, ceteris omnibus in hisce Studiis palmam facile præripiat; Nam quid Mathematicæ Scientiæ apud exteros viget & efflorescit, quod not debetur Britanniae? quid descripsit Cartesius, quod non antea Harriotus & Wughtredus demonstravere? quid expatiavit Bullialdus, quod non persentivit Wallisius? quid Lagneius disseruit, quod non Raphsonus indigitavit? quid Leibnitius tandem affecutus est, quod non à Newtono fuit Relictum?

P R Æ F A T I O.

Quod ad hæc attinet, quæ timidus admodum, nec sine metu aliquo, in ipsâ, ut videtur, Demonstratione, Viris doctis permittito, si exinde inter tanta Nomina meum profiteri velim, meritò quis me summæ arrogantiae postulaverit, qui verear, nè cum solum ad illos provocem, putarer nostris potius rationibus confidere, quàm illorum benevolentiae & humanitati; certè si ullo modo potuissem ex quovis etiam Mathematico de hæc Doctrinâ censuram extorsisse, ita hæc, qualiacunque, argumenta contempsissem, ut neque ad Literatum Orbem confugissent, nec provocassent.

Abiit jam plusquam Decennium, cum essem scilicet Initialem in hac Academia Gradum adeptus, ex quo primùm ad Doctissimum quendam Virum, uti probe nôrunt nonnulli, de nostrâ Circuli Quadraturâ detulerim; rescripsit nihil, jacuit res obruta oppressâque silentio.

Neque obticendum quidem erit, cum minùs prosperâ usus essem vitæ conditione, ab optimo Patre derelictus, sollicitâsse me, ut, qualiquammodo, remunerarer, si fortè possem Problema tamdiu Desideratum expedire; num ex insolentiâ fuit nimiâque fiduciâ? non quidem semper enim fui parùm mihi ipsi credulus, id eò tam obstinatè aliorum sensa de iis, quæ scripseram, requisivi; num contempsî gloriam nequaquam; at tamen quamvis non sit mihi saltem illa Cornea Fibra, ut ne gloriam velim Teruncio, imo non nolim maximis Studiis & Laboribus emptam, ut ne existimatione Eruditorum hominum permovear, quiddam ta

P R Æ F A T I O.

men æquè videbatur tunc temporis expectandum, ac gloria; nam is perperam Ornamenta vitæ aucuparetur, qui ea, quæ ad necessitates ejus & commoda pertinerent, vix quidem attigisset.

Tandem verò spem de munere ferè omnem abjeci, nisi quam jussere pauci aliquot Viri Optimi, tum etiam ut foverem, si Quadraturam aliquando absolverem, de re itaque cum Doctis communicandâ deliberavi; hæc enim mecum planè cogitabam, si Solutionem istiusmodi Problematis legendam proponerem, non dubium fore, quin Omnes Mathematici saltem accurrerent, audirent, expectarent, eò verò magis, cum non assererem me Circulum quadrasse, sed summissee rogarem, an quadrasset.

Itinere ergo Londinum semel iterumque de Industria confecto, certos quosdam Viros Doctissimos adivi ut eos consulerem, qui summa cum humanitate nostra acceperunt, quorumque Benevolentiam Maximo nos etiam studio oportet prosequamur, verùm ita deditos eos comperimus omnes quibusdam vulgo demonstratis, ut vel nè perlegerint, quicquid scripsimus, vel nè inspectum neglexerint; sapius petii ut propositiones nostras saltem evolverent, ubi verò erratum esset a nobis, aperirent, corrigerent; Nihil a Maximis Viris impetravi, nisi ut demonstrarent contrà nostram Circuli Rationem, nostris principiis ignotis, ex principiis quæ antea erant mihi nota & toti Orbi Mathematico, & quæ, pace talium Virorum dixerim, ne ea erroris falsitatisque coarguam, tamen quoad rem quam tra-

P R Æ F A T I O.

Etamus, incerta videbantur prorsus & dubia, quid facerem? repudiatus a Summis atque Optimis Viris nihil habui, quod ab aliis sperarem.

Ad Eruditorum itaque Cœtum Universum liceat me tandem posthæc, hæc etiam Scriptura quantumvis imperita, conferrem, nulla neque ambitio suasit, nec pruritus scribendi hoc conamen Mathematicum ut in Lucem producerem, sed necessitas quædam ex tenebris illud & obscuritate foras excussit, vi quasi inde coactum compulsumque, nè videamur esse falsitatis convicti, priusquam sciatur, annon veritatem præterea affecuti fuerimus, neque damnemur, antequam legamur, & ex iis principiis & probationibus, de quibus ipsa lis esset, & tota controversia.

Sæpius, non diffiteor, me in hanc Objectionem incidisse contra nostram speciatim Quadraturam, quæ solummodò est generalioris Doctrinæ consecrarium, alios scilicet Maximos & Eruditissimos Viros è contrario demonstrasse, adeoque fieri non posse ut quævis conclusio ex recto debitoque Ratiocinio educeretur, quàm quæ sit eorum conclusionibus consentanea, quia in Mathesi pugnancia non reperiuntur; quæ Obiectio huc plane redit; Omnes Summi Viri hætenus aliter senserunt, tunc autem repugnas? Equidem istiusmodi argumento agrè admodum responderem, sed tandem necesse est ut id reputarem, si hoc modo mecum ageretur, me pudore potius, & tantorum Virorum auctoritate, quam ratione & veritate vinci.

In

P R Æ F A T I O.

In hâc tamen ætate, atque his temporibus mirum prorsus videtur, talibus tamque obsoletis inusitatisque armis pugnari: Num Aristoteles, Ptolomæus & sexcenti alii abjecti jam ferè & desperati Recentioribus succubuerè, cum tamen piaculo ducatur, si vel ab Euclide vel Archimede vel Doctrinâ porro Infinitarum Serierum, & Hodiernis Mathematicis vel Philosophis, transverso etiam digito, dissentiamus? Quid de Maximis Viris statuamus, Harvæo, Hookio, Newtono, Halleio, ceterisque? unquàmne iis objiciebatur, quod a Prioribus discederent, nec requirebatur potius, quare dissensere? Cùm itaque hæc fuerit scribendi ratio, ut Viri Docti veritatem sequerentur, auctoritatem, non ratione suffultam, contemnerent, quamque semper suo jure assumpserunt, propter veritatis item causam esse putetur, si rogaret minorum gentium scriptor, ne iniquiores inter scribendum (cum æquiores merito sperare posset), quàm Summi Viri, subeat conditiones: Concedatur mihi venia, si liberiùs de hâc re disputaverim, quandocunque enim ex quolibet sive Recentiori, seu Veteri Scriptore dura immineat servitus, Ratio, Natura, & hæc Disciplina Mathematica admonet, jubet, nosmet, ipsam, ipsiusque in veritate investigandâ licentiam, in libertatem vindicemus.

Quod ad nostram demonstrationem Quadraturæ spectat, in præsentì, vix aliam allegavimus, quam quæ analogiâ & inductione nitatur; eam ipsam adhibet Wallisius, fatetur autem Newtonus se inde prima sua de Seri-

P R Æ F A T I O.

ebus infinitis cogitata derivasse; eandem itaque methodum usurpare malumus, ut simul videantur cernanturque, tum eorum, tum nostræ ejusdem generis Demonstrationes; interea præter hanc nos penes sunt, si rectè judicemus, Quatuor vel etiam Quinque Probationes ejusdem Rationis Circuli, totiusque hujus Doctrinæ; multa porro mihi scripta jam pridem extitère contra omnes methodos, Infinitarum Serierum, Fluxionum, Differentiarumque, ubicunque ad alias curvas quadrandas applicantur, quàm quarum rationes sunt jam bene cognitæ & spectatæ; iis vero neglectis, si tempus otiumque tulerit, hanc Disciplinam, Deo volente, prosequemur, cujus Specimen sive exemplum solummodo sufficiat impresentiarum exhibuisse, quod, qualecunque sit, limatissimis tandem Mathematicorum judiciis sistere oramus, non quasi falli nequeamus, verùm quod privatim concupivi, id jam publicè ut illos obtestemur, ne dedignentur errata nostra, accuratè, sed candidè perstringere: Nam Veritas mihi magis semper erit dilecta & amica, quam quævis nostra ipsius perexigua Existimatio.

GEOME-

GEOMETRIA SOLIDORUM, Sive MATERIÆ:

*Unde oritur Methodus Quadrandi Figuras
Curvilineas.*

De Velocitatibus Simplicibus sive Linearibus.

Defin. I.

VELOCITATEM appello istum cujusvis Quantitatis Progressum, (sive tardior fuerit sive celerior) quo illa vehitur, nullâ interim habitâ ratione Quantitatis, cujus fit Progressus.

Defin. II.

Velocitatem Simplicem, vel Monogrammam, vel Linearem Nomino, istum cujusvis Quantitatis Progressum, per quem illa à certo quodam termino, Unde Mente concipitur eam primum suum Motum ducere, ad alium, quem Mens item posuerit Motui ultimo, quacunque Semitâ, seu curvâ, seu directâ, aut quibuscunque viribus, pertendit; nullâ, uti prius, ratione habitâ Quantitatis, quæ promovetur.

Ex hâc itaque Definitione & Superiori, si a Quantitas promovenda (v. Fig. Lem.) vel infinitas numero partes complecteretur; vel si nullas, par esset Ratio, adeoque ut nihil in hâc Doctrinâ exinde mutaretur, ita Infinita Quantitatis Divisibilitas ex præsentī Mathesi eliminatur & exulat, utpote quæ nequicquam conferat ad Naturæ vel Veræ Matheseos cognitionem.

Defin. III.

Per Velocitatis autem Simplicis Progressionem intelligo istam certam positamque vim, seu gradum Velocitatis, quo procedit & promota est Velocitas Linearis.

Pro-

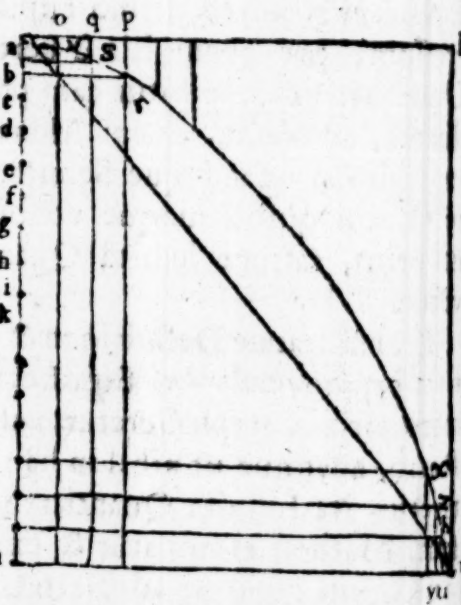
Progressio Temporis est ut 1. 1. 1. 1. h. e. secundum uniformem semper motum, & æqualem.

L E M M A.

Linea quævis, intra eosdem limites conclusa, innumeras illas prorsus rationes potest suscipere, quas velit quisquam ipsi attribuere, h. e. Progressio Velocitatis fieri potest, vel ut 1, 1, 1, 1, &c. 2, 2, 2, &c. 3, 3, 3, &c. vel ut 1, 2, 3, 4, &c. vel ut $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \&c.$ vel generatim, ut $1x, 1x, 1x,$ vel $1x, 2x, 3x, \&c.$ idemque erit dicendum de quibuscunque aliis, quæ excogitari possunt, Progressionibus in infinitum. Impræsentiarum autem nobis sat erit, si Progressiones, passim Mathematicis solennes, tantum perpendamus.

Dem. Si itaque de iis speciatim negetur Lemma, sumatur quævis Linea an .

1. Si hæc Linea in æquales partes 16 concipiatur esse divisa $ab + bc + cd, \&c.$ erunt partes ejusdem ut $1 + 1 + 1 + 1 \&c.$ & tota Linea ut 16, si in duodecim, ut 12, si in alias quascunque, ut Numerus denique juxta quem an dividitur; & pari modo $ab + bc + cd$ quæ



antea processere, ut $1 + 1 + 1, \&c.$ procedent porrò, ut $2 + 2 + 2, \&c.$ vel ut $100 + 100 + 100, \&c.$ vel ut $x + x + x, \&c.$ h. e. ut quantitates quælibet, nam cum an potest esse ut 1 vel 10, vel quivis numerus, idem etiam accidet Lineæ ab vel bc vel $cd, \&c.$

2. Cum

2. Cùm duci queat recta Linea ab a ad m , erit eadem Linea an , utpote quæ Trianguli fit Demissa sive Perpendicularis, ut ab , ac , ad , ae , vel posito $ab = x$ quantitati cuivis, ut $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, &c. nempe si Velocitas in mn progreditur ut 1 . 1 . 1 . 1 . ex hoc enim posito necesse est ut Ordinatæ in Triangulo amn , quæ parallelæ sint & æquales Progressionibus Velocitatis in an , Progressionem sortiantur Arithmeticam, quoniam eo modo Area, ab illis descripta, erit æqualis areæ ab Ordinatis descriptæ in Triangulo lam , ubi Velocitas in $al = nm$, progreditur, ut 1 . 1 . 1 . 1 , &c. & Ordinatæ quæ sunt $lm = an$ parallelæ, ut $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, &c. ideoque Triangulum nam dimidium rectanguli nl ; è contrario Velocitas in an progredi potest ut 1 . 1 . 1 . 1 , & in nm ut $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, h. e. uti patebit in Secundâ Parte hujus Geometriæ, Triangulum erit ad Rectangulum circumscriptum ut $\frac{1}{1+1}$, vel $\frac{2}{2+2}$, vel

$$\frac{3}{3+3}, \text{ vel } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}.$$

3. Eâdem constante Lineâ an ad ipsam conformetur Parabola nam , dico ejus Velocitatem progredi, ut 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , &c. Nam per Cas. 2. partes Lineæ al progredientur ut 1 , 2 , 3 , 4 , &c. adeoque on , qs , pr , ut 1^2 , 2^2 , 3^2 , quia sunt in ratione duplicatâ ao , aq , ap , sed on , qs , pr , æquantur diversis partibus Lineæ an , quæ idcirco progredientur, ut 1^2 , 2^2 , 3^2 , &c. Vel vicissim, Ordinatæ Parabolæ nam procedunt, ut $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, = ao , aq , ap , = 1 . 2 3 . Sed partes Lineæ an sunt in ratione duplicatâ Ordinarum = 1 , 2 , 3 , ergo ejusdem Lineæ an Partes sunt, ut 1^2 , 2^2 , 3^2 , &c.

Eodem præterea argumento partes Lineæ an procedunt, ut $1^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{2}}$; nam $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, = ao , aq , ap , = 1 , 2 , 3 , partibus Lineæ an , adeoque ordinatæ erunt, ut $1^{\frac{1}{4}}$, $2^{\frac{1}{4}}$, $3^{\frac{1}{4}}$, cùm sint
in

in ratione subduplicatâ abscissarum ; similique Methodo partes Lineæ an progredientur etiam , ut $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{4}$, Ordinatæ interim, ut $1\frac{1}{8}$, $2\frac{1}{8}$, $3\frac{1}{8}$, &c. & deinceps in infinitum.

Tandem si habeatur Parabolæ Ordinata nm = abscissæ an (cujusmodi Parabola obtinebitur si sumatur Conus, qui habeat baseos radium axi Sectionis æqualem) Ordinatæ ih , iz , yx , æquantur diversis Ordinatis aliis, quæ Originem ab a trahunt & recidunt tandem in mn , h. e. $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{2} = 2$ &c. & $\sqrt{mn} = an$, vel $1 = 1^2$, $2 = 2^2$, &c. & $mn = an^2$, & pariter $\sqrt{\sqrt{1}} = \sqrt{1}$, $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{mn}} = \sqrt{an}$, & denuo partes Lineæ an progredientur, ut $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. ubi ordinatæ sint, ut $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{4}$, &c. atque eâdem ratione fiet progressus in infinitum, h. e. uti patebit in Parte Secundâ hujus Geometriæ, Parabola erit ad rectangulum circumscriptum, ut $\frac{2}{2+1}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$, $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$, $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$, &c.

4. Ponatur jam Paraboloeides Cubicale nam , cujus Ordinatæ erunt, ut $\sqrt{(3)} 1$, $\sqrt{(3)} 2$, $\sqrt{(3)} 3$, sed per Cas. 2. duci possint Ordinatæ, quæ sint ut 1 , 2 , 3 , & partes Lineæ an sunt in triplicatâ ratione earundem = 1^3 , 2^3 , 3^3 , &c. parique ratiocinio, quoniam $\sqrt{(3)} 1 = 1$, $\sqrt{(3)} 2 = 2$, $\sqrt{(3)} 3 = 3$, partes Lineæ an procedent etiam, ut $1\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{3}$, ubi fuerint Ordinatæ, ut $1\frac{1}{9}$, $2\frac{1}{9}$, $3\frac{1}{9}$, vel ut $1\frac{1}{9}$, $2\frac{1}{9}$, $3\frac{1}{9}$, ubi Ordinatæ, $1\frac{1}{27}$, $2\frac{1}{27}$, $3\frac{1}{27}$, vel 1^9 , 2^9 , 3^9 , ubi Ordinatæ erunt 1^3 , 2^3 , 3^3 , &c. Similiterque demonstrari potest de cæteris Paraboloeidibus, quæcunque tandem fuerint, sive in Multiplicatâ, seu Submultiplicatâ Abscissarum ratione in infinitum, hinc vero, uti postea dicetur, Paraboloeides Cubicale erit ad Rectangulum circumscriptum, ut $\frac{3}{3+1}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$,

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}, \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}, \frac{9}{9+3}, \text{ \&c. } Q. E. D.$$

Hoc vero Lemma patet, si rationes solummodò Quantitatum concedamus esse Infinitas, & omnem Quantitatem, ejusve rationem, exprimi posse per Lineam pro lubitu assumptam, quod genus Expressionis omnes Mathematici putârunt semper sibi fuisse integrum.

PROP. I.

Linearum, quæ intra eosdem Terminos sint conclusæ, quarum autem rationes inter se discrepent, Mensuræ sunt, dato tempore, Velocitatum simplicium Progressiones.

Dem. Datâ enim Velocitate, sunt Mensuræ Linearum, quæ non iisdem terminis definiuntur, diversæ temporum Progressiones; sit ab (vid. Fig. Lem) Velocitas data, ergo $ab + ac + ad$, &c. erunt $= ab + bd + dg$, &c. quarum partium Progressiones temporum forent, ut 1, 2, 3, &c. atque igitur ex adverso, si hæ Lineæ ad eosdem terminos revocentur, erunt Mensuræ, dato tempore ab , diversæ Velocitatum Linearium Vires, seu Progressiones, inter a & b , ut 1, inter b , & c , ut 2, inter c & d , ut 3, &c. quoniam eodem tempore, duplâ autem vel triplâ Velocitate, &c. percurreretur bd vel dg , &c. quo duplo vel triplo tempore, & simplâ Velocitate eadem bd , vel dg Lineæ peragentur; & similiter in Motu æquali, cum $ab + bc + cd$, &c. sint ut $1 + 1 + 1$, &c. vel ut $100 + 100 + 100$, &c. ejusdem Lineæ, vel ejusdem Lineæ partium æqualium diversa ratio exurget, propter diversam Velocitatis simplicis Progressionem, eodem dato tempore; h. e. tempore quo $1an$ perficietur, vel ejusdem Pars quælibet ab , eodem perfecta erit $100an$, vel $1000an$, &c. vel quælibet earundem pars, ex centuplâ, vel millecuplâ Velocitate; atque eodem modo si Velocitatis ab Progressio augeatur in duplicatâ, vel triplicatâ, vel quâcunque ratione inter b & c , c & d , d & e , &c. quæ sint, ut 2, 3, 4, &c. iisdem terminis seu temporibus consistentibus, tantundem erit, ac si, Velocitate ubique manente eadem, augerentur temporum Progressiones, producerentur autem termini. *Q. E. D.*

Coroll.

Coroll. 1. Ergo fieri potest, ut quæ videatur eadem esse Linea, reipsa non sit semper ea, quam cernimus, sed quam cogitamus, atque igitur in quantitatibus etiam Mathematicis erit à Sensibus abstrahendum.

Coroll. 2. Porro, per præcedentem, Linea quævis eisdem limites affirmans, potest esse vel dupla, vel tripla, vel millecupla, aut infinita etiam in ratione suâ ad aliam quandam intra præscriptos item terminos interjectam. Nam Progressiones Velocitatis Monogrammæ sive Linearis possunt esse, vel ut $1|1$, $2|1$, $3|1$, vel ut $1|2$, $2|2$, $3|2$, vel ut $1|m$, $2|m$, $3|m$, (si ponamus nempe $m =$ Numero infinito) atque itidem porro, Progressiones autem Velocitatum Æqualium, ut quivis Numerus x, x, x, x , &c. ergo in primo Exemplo erit Linea Arithmetica subdupla alterius intra eosdem Terminos comprehensæ, sed cujus Velocitatum Progressiones sunt omnes æquales sibi invicem, & maximæ Velocitati in Progressione dictâ Arithmeticâ; in secundo, duplicata Progressio erit subtripla alterius Lineæ eodem tempore terminandæ; in tertio erit infinitè multiplicata ferè Progressio Infinitesima alterius iisdem finibus definitæ, cujus autem Velocitatis Progressio est æquabilis, & in quoque termino $= m|m$, quo in casu erunt Progressiones,

ut $\frac{1}{1+m-1} = \frac{1}{m}$, & præterea in infinitum, ita ut

omnium Figurarum Rationes in hisce quantitatibus Monogrammis inveniantur, h. e. Linearis Progressio potest esse, ut x, x, x , &c. (posito x esse quemvis Numerum, vel Integrum, vel Fractum) vel ut $1|x$, $2|x$, $3|x$, &c.

Coroll. 3. Hinc Longissima quælibet Linea, vel Brevissima etiam, ad eosdem quosvis datos terminos se exactam inveniet, scilicet, si vel dato tempore auxerimus datam Velocitatem in ratione, quâ idem Tempus augetur datâ Velocitate, vel hanc si minuerimus, dato Tempore, quâ ratione, datâ

Velo-

Velocitate, minueretur illud; Longiorem Lineam $ac + ad + ae = ac + cf + fk$, intra $bc + cd + de$, & tandem pari ratione totam Arithmeticam Progressionem intra Limites a & n , dato nimirum tempore, præfinitò augendo Velocitatem, antea constitutumus; liquet vero ex iisdem Principiis ut Linea e.g. dupla, vel tripla, data Velocitate, aucto autem Tempore, in Spatium subduplum, subtripulum, augendo Velocitatem, dato Tempore, compingi potest, ita Lineam subduplam, subtriplam datâ Velocitate Tempus autem minuendo, dato Tempore, & minuendo Velocitatem in duplum, vel triplum Spatium posse dilatari. Nam si eadem posita sit Velocitas idemque Tempus, quæ priùs, (nempe ab) $\frac{1}{2} ab$, eâdem Velocitate, dimidio autem Tempore, conficietur, quo integro eâdem cum Velocitate a aggreditur ad b , ergo eodem Integro Tempore, cum Dimidia Velocitate, ab perficietur, qua integra subduplo autem Tempore a ad $\frac{1}{2} ab$ pertingit; per priorem enim reductionem, scil. Longissimæ Lineæ in Brevissimam, ab dimidia cum Velocitate, integro vero Tempore peragitur quo $bc = ac$, cujus Velocitas nimirum erit dupla, atque igitur Punctum nascens in $\frac{1}{2} ab$ dimidia cum Velocitate, & idem Punctum nascens in ab cum dupla, eodem Integro Tempore simul ab a progressa ad eundem Terminum b appellent, & quidem Linea $\frac{1}{2} ab$ in Longitudinem ab diffundetur.

Neque aliter processerit Demonstratio, vel in reliquis Terminis, nempe subtriplicis, subquadruplicis, &c. vel in Progressionibus aliis subduplicatis, subtriplicatis, &c. ita ut Infinitesimæ Infinitesimarum Infinitesimarum, &c. Lineæ ab , quæ ipsa concipi potest esse Infinitesima, produci queant in longitudinem Lineæ ab , atque Linea ab in longitudinem Lineæ an , & porro in infinitum; è contrario, ut superius est ostensum, longissimæ Lineæ etiam in Brevissimas ingrediuntur, neque intra quosvis definitos Limites consistit Natura Spatii Abstracti, five

sive Extensionis Mathematicæ, etiam Linearis & Monogrammæ.

Coroll. 4. Hinc item sequitur, quemadmodum de Quantitate a post Defin. 2. inuimus, non opus esse, ut $a b$ minima nempe Velocitatis Progressio habeatur pro Indivisibili, cum eadem $a b$ quæ designatur per 1, exprimi quoque potest per 100, vel per Infinitatem m , vel m^m , vel generatim per x^x , & præterea etiam in infinitum juxta Coroll. 2, vel tandem per $0 + 0$, &c; In Quantitatum enim sive Velocitatum Progressionibus nihil amplius perpendi debet, nisi quali Velocitatis Ratione aut Gradus Quantitates seu Velocitates describantur, non quantâ vel quam exiguâ Velocitate pars aliqua singularis totius Progressionis sit expressa, quoniam $1 + 1 + 1$, &c. est ad $1 + 2 + 3$, &c. ut $100 + 100 + 100$, &c. ad $100 + 200 + 300$, & $100 + 100 + 100$, ut $1 + 1 + 1$, &c. Ut verbo dicam ad rationes solummodo, seu respectus Quantitatum Mathematici animi advertunt, non autem ad ipsas Quantitates; Rationes vero infinitæ prorsus esse possunt, prout mens humana diversas infinitè posuerit comparationes; unde Lineæ, quæ neque actu, nec re ipsa sint æquales vel inæquales, divisibiles vel indivisibiles, finitæ vel infinitæ, evadunt in singulas istas Rationes pro humanæ mentis arbitrio, & diversis Relationibus ad animi lubitum institutis, sic enim Linea an , si ponatur æquabilis Velocitatum sive partium progressio, erit $1 + 1 + 1$, vel $1x + 1x + 1x$, si latus Trianguli $= 1 + 2 + 3$, &c. si abscissa Parabolæ $= 1^2, 2^2, 3^2$, si cum minimâ ejus Velocitate conferatur, erit ipsa maxima, vel infinita, si cum infinitè majori, erit ipsa minima, & pariter de cæteris ejus comparationibus cum aliis quantitatibus, quas cogitare possumus, innumeris & infinitis; ita ut quicquid patitur vel suscipiat quævis Linea, id solummodo videatur esse, quod mens humana ipsi affert & imponit, & infinita Natura Quantitatis est re ipsa vis mentis humanæ infinita Quantitates comparandi.

Coroll.

Corol. 5. Cùm igitur Quantitates ipsæ negligantur, & earum Rationes tantummodo sint Mathesi æstimatæ, Quantitates erunt æquales solum, quatenus earum Rationes æquantur, & quarum Rationes æquantur, illæ sunt, quas solas vocatas oportet æquales, *e.g.* si partes Lineæ an processerint, ut unitates, positâ istâ Ratione, sibi invicem erunt partes $ab=bc=cd$. &c. vel si processerint ut $100+100$, &c. sed ab non absolutè æquabitur ab , nam, aliâ ratione positâ, deletur æquatio, neque ab seu 1, erit $=ab$ seu 100; Jam verò si procedant $1+1+1$, &c. ut $100+100+100$, &c. in hoc respectu erit $100=1$; item in Rationibus Geometricis $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$, &c. h. e. $1=2=4$, & $2=4=8$, in hac Quantitatum Comparatione.

Pari etiam argumento, si sumatur Triangulum, cujus alterum Latus sit alterius duplum, adeoque partes omnes istius sint duplæ partium hujus, h. e. si, eodem dato tempore, perpendamus singularum Velocitates ad invicem esse, ut 2 ad 1, progredientur Partes Arithmeticæ alterius, ut 1, 2, 3, 4, &c. alterius autem, ut 2, 4, 6, 8, &c. vel æquales, hinc ut 2, 2, 2, &c. illinc ut 1, 1, 1, &c. Quòd si Velocitas $=2$ eodem tempore perficiatur ac Velocitas $=1$, procedent $2+2+2$, &c. ut $1+1+1$, &c. adeoque hac ratione æquarentur, licèt alio respectu fuerit altera Progressio alterius dupla, h. e. Tempore æquantur, Velocitate discrepant.

Ex hoc itaque Corollario declaratur, quod videbatur antea obscurum, cur figuræ, super æquali base, & inter easdem parallelas constructæ, fuerint æquales, quamvis figurarum latera, quoad Longitudinem suam, immane quantum discrepent, quæ tamen, necesse est, ut habeant Rationem æqualitatis; etenim in Parallelogrammis, *e.g.* si Basis communis foret a , Perpendicularis b , obliqua Linea ignota x , (quæ saltem numerator esse potest Lineæ a , juxta sui ipsius Puncta repetitæ) ab æquabitur ax , adeoque $b=x$; nimirum in Progressione Temporis, Quamvis Velocitatis Progressio possit esse in-

finitè Diversa, & Lineæ, quæ Velocitatibus describuntur, inter se invicem infinitè inæquales.

Ex hōc etiam Corollario liquet, cur, in Triangulis proportionalium Laterum, æquales sint Anguli, & ejusmodi multa; si enim discrepent Lineæ, quoad Longitudinem suam sive Velocitatis Progressionem, tamen quoad Rationem Progressionis Temporis, quo peraguntur, conveniunt.

Verum, quod maximè velit hoc Corollarium, hinc certè occurritur Errori cuidam, qui nimis percipit, nimirum in Mathesi esse æqualitatem Quantitatum absolutam, cum tamen, uti probavimus, illa in Mathesi non insit; & simili Ratiocinio concludetur contra quamvis absolutam Propositionem, *v. g.* tres Angulos Trianguli æquales esse duobus rectis, vel Quadrati Diagonalem esse cum ipsius Radice incommensurabilem, &c. quæ profecto certis positis, certæque Ratione, veræ sunt, aliis autem positis, falsæ; adeoque non universim valent, sed cautio & prudentia erunt in quibuscunque hujusmodi Demonstrationibus adhibendæ; nam si Velocitatis Progressio inter Angulos ponatur esse varia, Tres Anguli Trianguli possunt esse, vel Tribus, vel Quatuor, vel Quinque, &c. Rectis æquales.

Coroll. 6. Ex hâc Doctrinâ præterea exponitur, quid sit ista Quantitas vaga, in omnes partes sequax, cujusque autem arbitrio & ingenio obsequens, & obtemperans, Progressionis nimirum infinitio; non enim est quicquid velimus, omni Limite contempto, prout series infinitæ doceant, quo Axylo potitis & abditis Geometris, quidquam iis liceret affirmare, verum certum quoddam & determinatum, nempe unum & simile tempus, quo progrediuntur Velocitates, sive *ab* posuerimus pro æquali, seu *ac*, seu *an*, intra quod, inquam, in quaque Progressione, Velocitates omnes diversæ sunt peractæ; ex quibus minùs observatis orta est multa Obscuritas Mathesi magnæque Confusio, dum, loco temporis similis, Infinitæ Series assumpserunt tem-

pora diversa, vel quod idem est, diversas Velocitates, pro iisdem. Nam, *e. g.* Lineæ an partes progrediuntur (si ponamus Tempora & Velocitates singularum partium esse æqualia) ut $1 + 1 + 1, \&c. = 100 + 100 + 100, \&c. = m + m + m, \&c.$ in hac positâ ratione, & tota ergo Linea $an = m = 1$, quoniam $m + m, \&c. = 1 + 1, \&c.$ h. e. omnes singillatim Velocitates eodem Tempore, sive diuturno, sive instantaneo, tandundem enim erit, peraguntur, sed infinitæ Series aliquando etiam postulant, ut infinitio sit major quàm ut $1 + 1 + 1, \&c.$ h. e. quàm m , vel æqualia, tamen quid sit porro nesciunt; cujus Erroris hæc videtur fuisse causa, quòd cum Geometræ diversas Lineas & Progressiones iisdem Terminis conclusas reputârunt serè pro iisdem, incurrerunt quandoque in Progressiones majores quàm $1 + 1 + 1, \&c.$ *e. g.* vel $1, 2, 3, 4, \&c.$ vel $1^2, 2^2, 3^2, \&c.$ quas nullâ ejusmodi infinitione possent conficere; atque ideo liberum sibi fuisse arbitrabantur nullos prorsus limites Infiniti statuere, cum è contra hinc apparet omne Infinitum, vel quoad Tempus vel Velocitatem, æquè fines suos certos, quos negant Mathematici, sortiri, ac Principia sive initia, quæ eadem infinitæ Series asserunt & ponunt, *i. e.* Infinitio rationem habet unitatis, sive æqualitatis, in hõc æquabilis $x + x + x, \&c.$ Temporis respectu.

Coroll. 7. Atque adeò hinc elucescit quàm ineptæ & inutiles sint infinitæ etiam approximationes ad quasdam veritates assequendas, quæ, post infinitas illas, si fieri possent, nonnunquam infinitè — infinitè, &c. — infinito intervallo à veritate distabunt, quoniam, cum Tempus Progressionis sit simile, Progressiones ipsæ Velocitatum, quæ variæ sunt, non, uti oportet, satîs discernuntur.

Coroll. 8. Si nullo itaque alio modo possemus Objectiones istas, quæ ex Tangentibus & Figuris Circulo circumdatis oriuntur, contra nostram Quadraturam dissolvere, sciscitaremur, an Tangentes &

Polygonorum Lineæ sint ejusdem Velocitatis cum earum Velocitate, quas in Circulo ejusque Quadrato perpendimus? Si fuerint, an cum Semidiametri Circuli Progreſſione, an cum Progreſſione Ordinatæ, vel Sinûs conſpirent? nam, quoniam Triangulorum Latera ſunt ejusdem Velocitatis, ut cum utriusque, tum Diametri, tum Ordinatæ, Progreſſione convenirent, fieri non poteſt, quum plane admodum diſcrepant, ut poſt dicetur; nempe illius Progreſſio erit, ut $1^2, 2^2, 3^2, \&c.$ hujus ut $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$; ſi cum Ordinatæ itaque Progreſſione Trianguli Latera conſentiant, non coincident cum Progreſſione Diametri, & vice verſâ, utraque autem requiritur; ſi cum neutrius Progreſſione conſentiant, nihil ejusmodi Demonſtratio nempe ex Polygonis circumſcriptis ad rem attineret, quia Quadratum Circuli & ipſe Circulus eſſent Figuræ alterius prorſus generis, & alieni à Triangularibus, in quas reſolutæ eſſe concipiuntur Polygonæ, & proſectò (uti, inquam, ex iis, quæ ſequuntur, innotefcet) erit Progreſſio Diametri & Sinuum iſtiusmodi, ut Velocitates Linearum Trianguli (quæ fuerint ut $1, 2, 3, \&c.$) neque cum Velocitatibus Diametri, neque Ordinatæ concinant, quæ, ſicut ſuprà prædiximus, illinc erunt ut $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \&c.$ hinc ut $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \&c.$

Tandem rogarem, annon ex Superficiebus Planis, quas ſolummodo Vulgata Mathēſis proponit, Demonſtrationes concluderent pariter contra Quadraturam Parabolæ ac Quadraturam Circuli? Certiſſimum enim eſt Figuram quamvis Parabolæ circumſcriptam minorem eſſe in ratione ſuâ ad Quadratum, vel Rectangulum Parabolæ quàm ipſam Parabolam; quia reſpectu cujuſvis Figuræ, quæ ex Triangulis ſive Arithmetiſ Progreſſionibus conficiatur, Parabola quædam eſt Solida, cujus Infima Progreſſio, Ordinatarum ſcilicet, eſt, ut Triangularis, altera Abſciſſarum in ratione ejusdem duplicatâ.

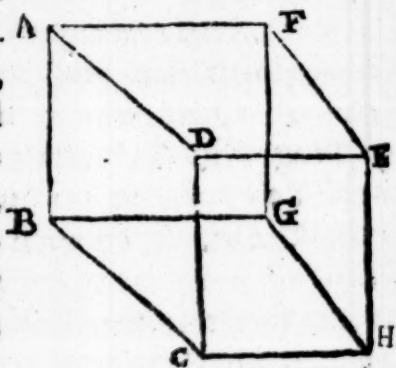
Si itaque Circulus probetur item esse Figura Solida, cujus altera Progressio, Ordinatorum nempe, est ut Triangularis, altera Abscissarum, ut Quadruplicata ejusdem, facile quæcunque, hoc genus, demonstrationes contra Quadraturam Circuli ex Planis vel Triangularibus Seriebus, evanescent.

Præterea sit jam am Circulus, juxta Decantatam Matheseos Doctrinam, in chordas innumeras prorsus divisus, quarum Velocitates, si fuerint æquales iis in Radio an , & eodem tempore tum Radius an , tum am Circuli Quadrans conficiatur, an erit æqualis am , contra Naturam Curvæ Lineæ & Rectæ receptam, si nec Velocitates nec Tempora fuerint in utrisque æqualia, non totidem erunt chordæ in am , quot Divisiones in an , quod ponit Geometria Solidorum, & Tempora quidem æqualia esse, sed Velocitates Diverfas.

Atque idem Ratiocinium obtinet in Triangulo nam , ubi comparantur am cum an , h. e. licet, secundum Vûlgatam Mathesin, fieri nequit, ut habeatur Ratio inter an & Quadrantem Circuli am , vel Hypothenusam Trianguli iisdem Literis designatam, quoniam neque Velocitates neque Tempora eadem conficiendi accuratè definiuntur, tamen non ideo sequitur dari non posse, tum Circuli, tum Trianguli Quadraturam in Geometriâ Solidorum, ubi Progressio Velocitatum deorsùm tendentium, quoad Tempora, in quibus conficiuntur, eadem sit in an & am , & curvitas Circuli vel Hypothenusa Trianguli am oriatur ex variâ Progressione Velocitatum in Ordinatis, & Abscissis, quæ itidem in hac Geometriâ determinatur; unde patet, cur an sit cum am , vel Circulo, vel Trianguli Hypothenusâ, Incommensurabilis; nimirum quia Progressiones Temporum & Velocitatum, cujusmodi sint, nequaquam, à Mathesi Planorum celebratâ, explicantur.

Cor. 9. Denique cum Linea intra eosdem terminos commissa omnes illas innumeras prorsus Rationes potest suscipere, quas velit quisquam ipsi adscribere,

h. e. cum sit vel ut $x. x. x$, &c. vel ut $1x^{1^x}, 2x^{1^x}, 3x^{1^x}, 4x^{1^x}$, &c. secundum præmissam Propositionem, consequitur Geometriam Solidorum Vulgatam omnino à veritate discrepare, cum ea tantum perpendit unam certamque Velocitatem ductam in aliam, eamque porro in tertiam *Æquabilem*; è contrà potest Linea esse, ut $x. x. x. x$, &c. $= m$ nimirum ut Velocitates infinitè diversæ, & eadem Progressiones, si in seipsas fuerint multiplicatæ, ut x, x, x, x^{1^2} , denuò autem multiplicatæ, ut x, x, x, x^{1^3} , vel x, x, x, x^{1^4} , &c. & sic deinceps. Atque igitur Progressio *Æquabilis* m , vel m^2 , vel m^3 , vel m^4 , &c. multiplicata in seipsam producet Quadratum, cujus latus fuerit Linea, vel Quadratum ejusdem Lineæ, vel Cubus, vel Biquadratum, &c. eadem vero Series, si præterea multiplicetur in seipsam, producet Cubum, cujus Altitudo vel Perpendicularis Progressio erit Linea, vel Quadratum, vel Cubus, &c. Basis autem ejusque Progressio ut Quadratum, vel Biquadratum, vel Cubo-cubus, &c. quod facile concipi potest in Schemate apposito, ubi AB est Perpendicularis Progressio, quæ si fiat, ut $x + x + x$, &c. & Quadratica, $BC \times BG$, ut $x + x + x^{1^2}$, &c. erit Cubus, ut $x + x + x^{1^3}$, &c. vel sicut tota Linea est m Quadratū m^2 , erit Cubus, ut m^3 : pariter si Progressio Lineæ AB sit ut $x + x + x$, &c. Lineæ autem BG ut $x + x + x$, &c. & BC porro ut $x + x + x^{1^2}$, &c. Quadratum BH erit ut m^3 , & Cubus DG ut m^4 , similique Ratiocinio Cubus erit, ut m^5, m^6, m^7 , &c. si Quadratum $BCGH$ sit ut m^4 , vel $m^2 \times m^2$, sive ut m^5 , seu $m^2 \times m^3$, vel $m^1 \times m^4$, sive ut m^6 , seu $m^3 \times m^3$, &c. in infinitum, vel si BC sit $\frac{1}{2} m, \frac{1}{3} m, \frac{1}{4} m$, &c. ita, ut Progressio BG multiplicata in ipsam Easdem Quantitates m^5, m^6, m^7 , &c. affirmet.



Aliter, Duci potest *BCHG* Quadratum in *AB* Lineam, h. e. per singula ejusdem puncta, unde constituetur Cubus Vulgaris, Cubus autem Vulgaris duci potest in eandem Lineam *AB* ita, ut in suâ Progressione se exprimat in singulis Superioris Cubi Quadratis, si iterum ducatur in Lineam *AB*, Cubus quartæ potestatis se exprimet in singulis Ejusdem Primi Cubi quadratis, atque porrò; prout, in nostris Principiis Philosophiæ, jam antea ex Clarissimo *Wallisio* probavimus de Spatio Cylindrico, Cap. 4. §. 11. adeoque, quod spectat ad Veram Solidorum Geometriam, non solum Cubus abit in Tres Dimensiones, verum etiam in Quatuor, Quinque, &c. in infinitum, vel in eas item, quæ à numeris fractis exprimuntur.

Sin autem hæc ita se habeant, meritò dici potest hujusmodi Ratiocinatio, Geometria Solidorum, sive Materiæ, cum Densitates Materiæ hinc explicari possint, nimirum si Cubus simplex qui oritur ex Multiplicatione Simplicis Progressionis duplici, scil. $x. x. x. \&c. \times x, x, x, \&c. \times x, x, x, \&c.$ sive $m \times m \times m = m^3$ exhibet minimam Solidi vel Materiæ Densitatem, seu Resistentiam, $m^4, m^5, m^6, m^7, \&c.$ in eodem abstracto Spatio, exprimerent diversas Materiæ Densitates, sive Resistentiarum Gradus, vel etiam Expansivas (si ita loqui liceat) Velocitates; nam, ut Materia resistit, vel Actioni renititur, ita etiam se exerere, & vires quasdam explicare ex propriâ suâ Actione, quæ a Deo ipsi imprimitur, nulli prorsus dubitamus. Ex Densitate ergò Velocitatum sive Dimensionum $m^3, m^4, m^5, m^6, \&c.$ mensuratur, uti impræsentiarum videtur, Vis seu Velocitas Expansionis, unde conflantur Vires Centrifugæ, ut & Contractionis, ex quâ Centripetæ derivantur.

De naturâ vero Materiæ alibi erit Disputandum, ex quâ omnes ejus Proprietates, Extensionem nempe, Soliditatem, Momentum & Pondus, Attractionem, Colores, cæteraque Materiæ Attri-

buta educemus; de Mathesi autem jam Deliberamus.

PROP. II.

Rationem exponere, cur Arithmetica Progressio Velocitatum sit ad Progressionem Maximarum *Æ*-qualium, ut 1 ad 2; cur Duplicata ejusdem sit porro ad Progressionem Maximarum *Æ*-qualium, ut 1 ad 3. De Triplicatâ enim, Quadruplicatâ, &c. ejusdem, similis erit Demonstratio, scilicet erunt ad Progressiones Maximarum *Æ*-qualium, ut 1 ad 4, 5, &c. in Infinitum.

Cas. 1. Per Def. 1. & Prop. 1. tum Progressio Velocitatum *Æ*-quabilis, tum Arithmetica, simul ab eodem Terminò inchoantur; qui Terminus, tanquam limen quoddam, quo ingreditur Velocitas, sive, primum velut vestigium impressum, æstimari potest, unde iter sibi velit intendere; quem etiam Terminum ubicunque fixerimus, idem est, & ubicunque fuerit definitus, par erit ratio, si modò utramque simul Progressionem concluderimus. Ergo, dum *Æ*-quabilis sit Velocitatis Progressio ab *a* ad *b*, festinat Arithmetica eodem tempore ab *a* ad *c*, quæ comprimitur inter *b* & *c* = *ab* juxta Prop. 1. (si enim primus Arithmeticæ Progressionis Terminus esset itidem Unitas, foret ut *Æ*-quabilis Progressio, contra Hypothesin.)

Itaque prima Velocitatis Arithmetica Progressio æquabitur 2 = primæ Maximæ, ubi Progressio Velocitatis *Æ*-qualis fuerit = 1, (vel 1 ubi *Æ*-quabilis = $\frac{1}{2}$, vel 200, ubi *Æ*-quabilis = 100, &c.) Unitatem autem in præsentî ponamus Progressionem esse Velocitatis *Æ*-quabilem: Ergò totidem Maximæ Velocitates primæ, quot Unitatibus processerit Velocitas *Æ*-quabilis eodem tempore = *ab* + *bc*, erunt numerandæ, nimirum 2 + 2; quia Unitates hæc reputantur esse *Æ*-qualium Temporum, & Velocitatum Indices, ideoque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, vel 1 = *ab*, quo tempore Velocitas Dupla & Maxima 2 = *bc* peragitur,

agitur, erunt $= 1 + 1 = ab + bc$, quo tempore ac erat peracta, h.e. quia puncta, (per Defin. 1. & Prop. 1.) quibus tempora æqualia inchoantur & finiuntur, si Velocitates fuerint diversæ, idem designant Spatium, quod Velocitates æquales, si tempora sint diversa, sc. si idem sit tempus & dupla Velocitas, tantundem erit, ac si esset tempus duplum & simplex Velocitas, adeoque bc in primo Casu, $=$ Lineæ ac in Secundo; retrahatur jam Punctum Temporis b , quo inchoatur Velocitatis Arithmetica Progressio $bc = 2$ (ubi $ab = 1$) ad punctum Temporis quo inchoantur Velocitatis Progressio $ac = 2$, dupla Velocitas bc perficiet $ab + bc$, eodem tempore ab , quo Equabilis Velocitas perficit ab , primaque Arithmetica Progressio Velocitatis & Maxima erit 2, totidem vero Maximæ æquales, quot æqualia tempora $ab + bc$, vel $1 + 1$, vel $\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} ab$ postulant, nempe $2 + 2$ ad has vero illa, ut $\frac{2}{2 + 2}$; vel si ponamus $\frac{1}{2} ab$, seu $\frac{1}{2}$, Progressionem esse æquabilem, sive $\frac{1}{3} ab = \frac{1}{3}$, vel 100, illa erit ad has, ut $\frac{1}{1 + 1}$, ut $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}$, ut $\frac{200}{200 + 200}$, &c. scilicet cum ex Hypothesi instituitur comparatio inter Progressiones Velocitatum quæ simul inchoantur, simulque conficiuntur, omnes eadem (quoad Gradum) minutissimarum partium in quaque Progressione Velocitates, quæ diverso tempore, $ab + bc$, Spatium, ac , percurrunt, ad idem debebunt tempus revocari; unde $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ Velocitates $= 1 + 1 = 2 + 2$, &c. ex eadem Hypothesi.

Item cd erit $= ad = 3 =$ Maximæ 2^a Progressioni Velocitatis Arithmeticæ, ideoq; ob Rationes prædictas $\frac{1}{3} ab + \frac{1}{3} ab + \frac{1}{3} ab$, quo tempore Maxima Velocitas perficitur, $= 1 + 1 + 1$, $= ab + bc + cd$, & totidem Maximæ $= 3 + 3 + 3 = 2 + 2 + 2$; nam ut in æquali Tempore & Velocitate diversâ, $\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} ab = 1 + 1 = ab + bc$, in diverso Tempore, & Velocitate æquali (h.e. sive ab dividatur, sive multiplicetur, semper tenenda erit unitas, propter temporis mensuram,

ram, vel quævis alia quantitas modò constans fuerit & immutabilis) ita $1+1, 1+1, 1+1$ in ab erit $=2+1, 2+1, 2+1$ in ad , sed $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ in ab erit $=2+1, 2+1, 2+1$ in ad , adeoque $3+3+3$ in ad erit $=2+2+2$ in ab , & Progressio Arithmetica secunda ad totidem Maximas, ut 3 ad $2+2+2$, vel ut 1 ad 2; id quod alio etiam modo evincetur; nam in $3+3+3=2+1, 2+1, 2+1$ debet esse $2+2+2$ æquabilis, Progressio $=1+1+1$, aliter non foret Progressio æquabilis, verùm quemadmodum antea diximus, Arithmetica, adeoque iterum $3+3+3=2+2+2$.

Denuo de erit $=4$ Maximæ Progressioni tertiæ atque eapropter $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}ab = 1+1+1+1 = ab+bc+cd+de$, & totidem maximæ $=4+4+4+4=2+2+2+2$; nam $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+1+1+1$ in de , adeoque $1+1+1+1=2+2+2+2=3+3+3+3=4+4+4+4$ in ae , sed ubique Æquabilis Progressio $2+2$, &c. sumenda erit, ut quæ semper in hisce Æquationibus inveniatur, & ad quam reliquæ reducantur, atque idcirco in hac Progressione ratio erit ut 4 ad $2+2+2+2$, vel ut 1 ad 2; id vero, quod adhuc magis hoc ratiocinium confirmat, est, quòd, $\frac{1}{2}$, Progressio in ab in, 2, Progressionem in ac , $\frac{1}{3}$ in ab , $\times 3$, in ad , $\frac{1}{4}$ in ab , $\times 4$, in ae , &c. semper & ubique constituunt unitatem, æquabilem nempe Progressionem utrinque, quod oportet, si hæc

ratiocinatio esset vera; sed $\frac{2}{2+2} + \frac{3}{2+2+2} + \frac{4}{2+2+2+2}$, &c. vel $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1+1} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+1+1+1}$, &c. $=\frac{1}{2}$, b. e. addendo Arithmetica Progressionem ex alterâ parte in Numeratore Fractionum, ex alterâ autem eandem Progressionem in Denominatore earundem, vel, quod eòdem recidit, $\frac{4}{2+2+2+2}$ ultimus terminus, in quo reliqui præcedentes continentur & computantur, erit $=\frac{1}{2}$, nimirum Arithmetica

tica Progressio, quatenus sit ejusmodi, in quovis Progressione, ubi consistit, & terminatur, Gradu, five finito vel infinito, erit ad Progressionem Maximam & Æqualem ut 1 ad 2. *Q. E. D.*

Vel sic quidem eundem Casum approbamus, dum Velocitas Æquabilis procedit ab a ad b , Arithmetica eodem Tempore progreditur ab a ad c , vis itaque five Progressio Arithmetica ad ab usque, eadem est, per prædicta, ac æquabilis, quam superat per $bc = 1$, porro dum promovetur æquabilis Progressio ab a ad c , Arithmetica producit ab a ad d , sed usque ad ac eadem est utriusque Progressio, &c. $b. c.$ æquabilis Progressio erit, ut $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4},$ &c. $= \frac{1}{1}$ cum interea Arithmetica semper excedet æquabilem unitate solâ, adeoque hæc ad illam, ut $1+1$ ad 1 ; At vis maxima Velocitatis Arithmetice designari potest per unitatem illam, quâ superat æquabilem, totidem vero Progressiones erunt sumendæ, quot unitates ac , vel ad , vel ae imperant, adeoque Arithmetica Progressio Velocitatis ad Æquabilem Maximam erit, ut $\frac{1}{1+1}$, vel ut $\frac{2}{2+1}$, vel ut $\frac{3}{3+1}$, &c. in infinitum, ubi $\frac{2}{2}, \frac{3}{3},$ &c. $= \frac{1}{1}$ non enim erit, ut ostensum est, cur Æquabilem inter Arithmeticas computemus Progressiones, atque igitur Progressiones fuerint ubique ad invicem ut $\frac{1}{2}$; vel perinde foret, ac si Rationes describeremus per $\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1+1};$

$$\frac{3}{3+1+2}, \frac{4}{4+1+3},$$

&c. Si $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3},$ &c. non sint æquabiles progressionibus $= \frac{1}{1}$, verum Arithmetice, & $+1, +2, +3,$ &c. in fractionum Denominatoribus, sint expressiones pariter Arithmetice. *Q. E. D.*

Tertia probatio petatur ex Corollariis 3, 4, & 5, Prop. 1. Primam itaque progressionem Arithmeticam esse ad totidem maximas, ut 2 ad $2+2$, vel ut 1 ad $1+1$, vel ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, vel ut quivis numerus ad ejusdem duplum, jam antea est demonstratum; fed

sed $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, &c. vel $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, &c. vel $x + x$, &c. per Coroll. 4. erunt, ut $1 + 1$, &c. adeoque, in hac positâ ratione æqualitatis per Corol. 5. singulæ erunt progressionēs, ut $1 + 1$, &c. vel $an = m =$ numero infinito, per Coroll. 3. $= ab = 1$ obtinebit rationem Progressionis Arithmeticæ ad totidem maximas nempe

pe $\frac{2}{2+2}$, vel $\frac{1}{1+1}$, quod verò dictum est de ab accommodari poterit ad $ac = 2$, vel $ad = 3$, &c. *b.e.* $1 = 2$, &c. $= m$, & Arithmetica Progressio $2 = 3 = 4 = 2m$, & totidem maximæ $= 2 + 2$, vel $3 + 3$, vel $4 + 4$, vel $m + m$, scilicet Arithmeticæ Progressiones erunt ad totidem Maximas, quot quivis numerus, vel etiam infinitus, Unitatum jubet esse ponendas, vel ut $\frac{2}{2+2}$, vel $\frac{3}{3+3}$, $\frac{4}{4+4}$, &c. in quâque

Progressione, atque in infinitâ, ut $\frac{m}{m+m}$. *Q. E. D.*

Vel tandem per Coroll. 5. Cùm rationes tantum in quâcunq; progressionē expendantur, si habeatur Series Arithmetica,

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. &c.
Rationes erunt 1 1 1 1 1 1 1 1 &c.

Totidē maximæ, 1 1 1 1 1 1 1 1 &c.
————— = 2 2 2 2 2 2 2 2 &c.

viz. quot ponunt Arithmeticæ Progressionis unitates, computando scilicet unitates, supra binarios consistentes, bis, *b.e.* si ab eodem termino incipiatur Progressio utraque. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ex priori patet Quadrata $2 + 2$, $3 + 3 + 3$, $4 + 4 + 4 + 4$, $5 + 5 + 5 + 5 + 5$, &c. esse ut $2 + 2$, $2 + 2 + 2$, $2 + 2 + 2 + 2$, $2 + 2 + 2 + 2 + 2$, &c. adeoque procedere quadrata, ut Arithmetica Velocitatum Progressio, cujus communis differentia erit Numerus binarius, quam vocemus Arithmeticam duplam, ergò dum a æquabili Velocitatis Progressione pergit ad b , Arithmetica dupla pertendet ab a ad d per prædicta; *b.e.* $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + 1 + 1$, & totidem Max.

Maximæ = $3+3+3$, atque ita Arithmetica Dupla Progressio = 3 ad Totidem Maximas = 9, ut $\frac{1}{9}$, = $\frac{1}{3}$; Item Secunda Arithmetica Progressio = 5, sed $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, ergo in Maximis $1+1$, &c. = $3+3+3+3+3$, atque ita Arithmetica Progressio Dupla 5 ad Totidem Maximas 15, ut $\frac{1}{15}$, = $\frac{1}{3}$, &c. *h. e.* $\frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$, &c. = $\frac{1}{3}$, Addendo Numerantes Progressiones ex alterâ parte, ex alterâ Progressiones Denominantes; sive sumendo, secundum Casum præmissum, quamvis Progressionis partem, ac si esset ultima. *Q. E. D.*

Vel, juxta Demonstrationem secundam, cum percurritur solum ab , dum dupla Arithmetica Velocitas ad d pertingit, erit æquabilis denuò 1, excessus vero 2, dum a promovetur ad d , dupla Arithmetica ad f usque adibit, ideoque æquabilis = $2+1$, excessus autem uti antea = 2, & sic deinceps, sed totidem maximæ Velocitates æquales erunt totidem excessibus, sive numeris binariis, quot unitates sunt in quâque Progressione duplâ Arithmeticâ, in primâ nempe Progressione 3 in 2, in secundâ 5 in 2, in tertiâ 7×2 , &c. Arithmeticæ autem Progressiones erunt interim ut 1 in 2, 3 in 2, 5 in 2, &c.

$$\text{h. e. ratio ad invicem} = \frac{2}{2+4}, \frac{6}{6+4}, \frac{10}{10+4}, \text{ \&c.}$$

$$\text{ubi } \frac{2}{2} = \frac{6}{6} = \frac{10}{10}, \text{ \&c. vel assumendo ubique unita-}$$

$$\text{tes pro binariis } \frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{5}{5}, \text{ \&c. \& tandem } \frac{1}{1+2}$$

$$= \frac{3}{3+2} = \frac{5}{5+2}, \text{ \&c. } = \frac{1}{3}. \text{ Q. E. D.}$$

Vel, secundum Probationem tertiam, Cum sit prima Progressio Arithmetica dupla ad totidem maximas, ut 1 ad $1+1+1$, eadem erit ratio 3 ad $3+3+3$, vel 5 ad $5+5+5$, vel m ad $m+m+m$, quoniam per Corollaria inibi laudata $an = m = 1$, eademque ratione quævis ejusdem an pars, sive fuerit 3 vel 5, &c. erit = 1. *Q. E. D.*

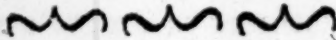
Vel

Vel, consentaneum Demonstrationi ultimæ, Arith.
metica simplex Progressio

erit, = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7, &c.

dupla, = 1 3 5 7, &c.

Rationes, = 1. 1. 1. &c. = 2. 2. 2, &c.

totidem 

maximæ, 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.

= 3. 3. 3.

Computando nimirum unitates supra ternarios bis, ut Progressio utrinque ab eodem termino, quod opus est, inchoetur, & desinat in eundem; sin autem ponamus loco Arithmeticæ simplicis 1. 2. 3. 4, &c. ejusdem duplicatam 1. 4. 9. 16, &c. erunt differentiæ in duplâ Progressione Arithmeticâ per prædicta, atque eodem rediret ratiocinium cautione adhibitâ, alioque porrò argumento instrueremur, Quadrata nempe procedere ut Arithmeticæ duplæ Progressiones. *Q. E. D.* De Triplicatis, Quadruplicatis, Subtriplicatis, Subquadruplicatis, vearundem Multiplis vel Submultiplis quibuslibet, eodem modo liceret argumentari, verùm ne prolixiores simus, hæc omnia dimittimus, cùm in præsentis fati habeamus ad fontes digitos intendisse, unde petantur reliqua.

Coroll. 1. Ex præcedenti ergò liquet, non solum Rationes Geometricas in infinitesimis quàm proximè ad Arithmeticas accedere, verùm etiam reipsâ & in quibusvis Quantitatibus finitis Geometricas hæc in istiusmodi rationes, si earum natura sit ritè intellecta & perpenſa, abire.

Coroll. 2. Item ex eâdem elucet non desiderari infinitas Sèries, quibus efficiatur, ut possint excessus pro nihilo reputari, ad Rationes debitas eliciendas; cùm Ratio constet datâ Progressione, in quoque etiam Terminò, id quod planè oportet factum, positâ enim Ratione inter binas quasunque Progressiones, fieri, uti videtur, nequit, ut quâlibet Infinitione mutaretur, cùm terminorum quivis numerus seu finitus, seu infinitus, alios quidem terminos

appor-

appor-
tata, rationem autem ponit eandem; si enim
infinita Progressio ad aliam, certam terminatamque
rationem obtineret, nec tamen ejusdem pars ad æ-
qualem partem alterius, quis suspicaretur partes cum
totis suis esse homogeneas, h. e. re ipsâ esse partes?
Certè si an esset ad lm , ut 1 ad 1, vel $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3}$, &c.
singulæ earundem Progressiones forent in eadem
ratione, quare verò Quadrata vel Cubi vel biqua-
drata eidem legi partium & totius minùs obedi-
rent quàm cæteræ quantitates, difficile erit dictu,
demonstratu difficilius.

Coroll. 3. Ergò si Indices Dignitatum cujusvis
Progressionis exponantur per communem earum
differentiam, Index æquabilis esset, 0, Arithmeticæ
simplicis 1, Arithmeticæ duplæ Progressionis, vel
duplicatæ 2, triplæ vel triplicatæ 3. &c. juxta vul-
garem receptamque notationem, sin autem expri-
mere velimus Indices, prout earum jusserint ratio-
nes five progressionis Velocitatum, quas asserunt
singulæ ad Unitatem, alia prorsus foret, nescio an-
non etiam accuratior designatio, nimirum æquabi-
lis progressionis esset Index 1, Arithmeticæ sim-
plicis 2, duplæ 3, triplæ 4, &c. adeoque $1+1+1$,
&c. ad $1+1+1$, &c. esset in ratione æqualitatis,
cujus ratio est 0, $2+2+2$, &c. Indices Arithme-
ticæ Progressionis ad $1+1+1$, &c. indices æquabi-
lis, ut 2 ad 1, & si pro quaque unitate in $2+2+2$,
totidem sumantur Numeri binarii, erit $2+2+2$
 $+2+2+2$ ad $2+2+2$ ut 2 ad 1, & pari modo
 $3+3+3$ ad $1+1+1$, ut 3 ad 1, & Totidem Ter-
narii, quot Unitates in $3+3+3$ reperiuntur ad
 $3+3+3$ ut 3 ad 1.

Cor. 4. Atque hinc perfacilis oritur & pèrexpedita
Declaratio utriusque Palmariæ nostræ Propositionis
in Parte Secundâ hujus Geometriæ, quas ibi solum-
modò Inductione probavimus. 1. Velocitatum, quæ
ex alterâ parte promoventur, juxta Progressionem A-
rithmeticam simplicem, ex alterâ juxta eandem, vel
ejusdem multiplicatam, Rationes ad totidem maximas
esse,

esse, ut Indices simplicis Arithmeticae ad eosdem Indices auctos Indicibus simplicis, vel ejusdem multiplicatae, si utrinque sit Progressio nimirum Arithmetica simplex, ut $\frac{1}{1+1}$, si inde Arithmetica, hinc ejusdem duplicata, vel dupla, ut $\frac{1}{1+2}$, si hinc ejusdem triplicata vel tripla, ut $\frac{1}{1+3}$, &c. in infinitum.

2. Eodem Ratiocinio, si alterius Progressionis Arithmeticae, duplicatae, triplicatae, &c. Ratio sit 1, 2, 3, &c. vel subduplicatae, subtriplicatae, &c. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. alterius autem pariter sit, 1. 2. 3. vel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. erunt Progressiones ad totidem Maximas, ut $\frac{1}{1+1}$, $\frac{2}{2+2}$, $\frac{3}{3+3}$, $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$, &c. & generatim si alterius Progressionis Numerantis ratio sit x , alterius Numeratae y erunt Progressiones ad totidem Maximas, ut x ad $x+y$.

GEOME-

GEOMETRIÆ SOLIDORUM,

De Velocitatibus Compositis,

S I V E

DE CIRCULI QUADRATURA,

Aliarumque Curvilinearium,

P A R S S E C U N D A.

P R O P. I.

OMNIS Velocitas, per quam Figura quævis, juxta pervulgatam Methodum Ordinatarum, perfecta est, ex geminâ componitur, quarum alteram liceat Devehentem Dirigentemve appellare, Profecta autem sive Directa designet alteram, quas Numeratam porro Numeratamque quandoque vocabimus, Perpendicularem item & Transversam, e. g. Diametri & Ordinatæ, ut in re novâ copiosâque exurgat etiam messis verborum refertior, neque Mathesis, quæ solum veritate ferè & Scientiâ abundet, balbutientis insimuletur infantia. Qui tamen hæc nostra vocabula averfantur, eò non inviti ablegamus, unde magis apta & composita se posse desumere putaverint, nam alia aliis in deliciis esse solent, neque gravabimur vocum, quibus uti mallet, quemque sibi habere Delectum.

De ipsâ verò Propositione res est perspicua, & ex iis quæ sumus ostensuri ulterius declarabitur.

P R O P. II.

Si Velocitates Perpendiculares Progressionem sibi asciscant Arithmeticæ simplici convenientem, dum Transversæ intereâ suam vel Arithmeticam etiam simplicem, vel Geometricam quamlibet sortiantur, quæ sit ut ejusdem simplicis potestates, seu integre seu fractæ, Compositæ ex utrisque eam per-

E. e

agent

agent Rationem ad Transversas maximas Velocitates in Perpendiculares, quàm exhibeant Perpendicularium Indices ad seiplos, quibus Indices Transversarum apponantur, vel quam summæ Indicum ad eorundem Quadrata.

Probamus per Inductionem, quamvis enim multis variisque possemus Argumentis & Demonstrationibus huic Propositioni fidem astruere, uti ex primâ parte hujus Geometriæ patet, impræsentiarum tamen solummodò ex notissimo hoc genere Ostensionis celebratissimoque sufficiat hæc proposuisse.

Sint Indices
Velocitatis
Perpendicularis,

$\left\{ \begin{array}{l} 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1, \&c. \\ \text{vel } 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1, \&c. \end{array} \right.$

Indices autem
Velocitatis
transversæ si-

$\left\{ \begin{array}{l} 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, \&c. \\ \text{vel } \frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}. \frac{1}{7}. \frac{1}{8}. \frac{1}{9}, \&c. \end{array} \right.$

Rationes
velocita-
tis Per-
pendicu-
laris in
Transver-
sam ad
Rectan-
gularem
erunt

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+3}, \frac{1}{1+4}, \frac{1}{1+5}, \frac{1}{1+6}, \frac{1}{1+7} \\ \frac{1}{1+8}, \frac{1}{1+9}, \&c. \text{ vel } \frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}, \frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1+\frac{1}{5}}, \\ \frac{1}{1+\frac{1}{6}}, \frac{1}{1+\frac{1}{7}}, \frac{1}{1+\frac{1}{8}}, \frac{1}{1+\frac{1}{9}}, \&c. \end{array} \right.$

Eodem modo constitui potest Tabula sequens, in quâ Figuræ Arithmeticæ, quæ ad verticem ejus apponuntur, Potestates varias denotant, tanquam ipsarum Indices, Fractiones autem à latere ejusdem, Radices varias istarum Potestatum, quæ mixtæ Potestates Velocitates Transversas exprimunt, dum Unitas, in Tabulâ, è contrario Perpendiculares signifi-

cat,

cat, Rationes verò Velocitatum Perpendicularium in Transversas ad Rectangulares in ipsâ Tabulâ exhibentur.

T A B. I.

Lat. Quad. Cub. Biq. Quint. Sext. Sept.

	0	1	2	3	4	5	6	7
Sub-lat. $\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1+0}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$	$\frac{1}{1+\frac{2}{1}}$	$\frac{1}{1+\frac{3}{1}}$	$\frac{1}{1+\frac{4}{1}}$	$\frac{1}{1+\frac{5}{1}}$	$\frac{1}{1+\frac{6}{1}}$	$\frac{1}{1+\frac{7}{1}}$
Sub-quad. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1+0}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{1+\frac{2}{2}}$	$\frac{1}{1+\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{1+\frac{4}{2}}$	$\frac{1}{1+\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{1+\frac{6}{2}}$	$\frac{1}{1+\frac{7}{2}}$
Sub-Cub. $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1+0}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{1+\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{1+\frac{3}{3}}$	$\frac{1}{1+\frac{4}{3}}$	$\frac{1}{1+\frac{5}{3}}$	$\frac{1}{1+\frac{6}{3}}$	$\frac{1}{1+\frac{7}{3}}$
Sub-biqu. $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1+0}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{1+\frac{2}{4}}$	$\frac{1}{1+\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{1+\frac{4}{4}}$	$\frac{1}{1+\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{1+\frac{6}{4}}$	$\frac{1}{1+\frac{7}{4}}$
Sub-quint. $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{1+0}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{1+\frac{2}{5}}$	$\frac{1}{1+\frac{3}{5}}$	$\frac{1}{1+\frac{4}{5}}$	$\frac{1}{1+\frac{5}{5}}$	$\frac{1}{1+\frac{6}{5}}$	$\frac{1}{1+\frac{7}{5}}$
Sub-sexta. $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{1+0}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{1+\frac{2}{6}}$	$\frac{1}{1+\frac{3}{6}}$	$\frac{1}{1+\frac{4}{6}}$	$\frac{1}{1+\frac{5}{6}}$	$\frac{1}{1+\frac{6}{6}}$	$\frac{1}{1+\frac{7}{6}}$
Sub-septi. $\frac{1}{7}$	$\frac{1}{1+0}$	$\frac{1}{1+\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{1+\frac{2}{7}}$	$\frac{1}{1+\frac{3}{7}}$	$\frac{1}{1+\frac{4}{7}}$	$\frac{1}{1+\frac{5}{7}}$	$\frac{1}{1+\frac{6}{7}}$	$\frac{1}{1+\frac{7}{7}}$

In hanc solam, si, Inductione circumscriptâ, directâ adhibeatur Demonstratio, res non magni forsân moliminis, ex principiis superiori parte expositis, viginti præter-proptèr Celeberrimi *Wallisi* Propositiones compingi cernerentur, brevius etiam porro exprimendam; ponamus enim modò m Provectæ sive Transversæ esse Velocitatis cujusvis Indicem, Generalis regula pro ratione inveniendâ Velocitatis compositæ ad maximam Provectam sive Transversam in Dirigentem seu Perpendicularem, quam Rectangularem nominamus, sic facîle per litteras designatur $\frac{1}{1+m}$, sive $\frac{1+m}{1+2m+m^2}$, quæ ratio etiam totidem alias, secundam certè hanc Tabulam, complecteretur.

TAB. II.

Æq.	Lat.	Quad.	Cub.	Biquad.	Superf.
0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{1+0+0}$	$\frac{1}{1+1+0}$	$\frac{1}{1+2+0}$	$\frac{1}{1+3+0}$	$\frac{1}{1+4+0}$
1	$\frac{1}{1+1+0}$	$\frac{1}{1+1+1}$	$\frac{1}{1+2+1}$	$\frac{1}{1+3+1}$	$\frac{1}{1+4+1}$
2	$\frac{1}{1+2+0}$	$\frac{1}{1+1+2}$	$\frac{1}{1+2+2}$	$\frac{1}{1+3+2}$	$\frac{1}{1+4+2}$
3	$\frac{1}{1+3+0}$	$\frac{1}{1+1+3}$	$\frac{1}{1+2+3}$	$\frac{1}{1+3+3}$	$\frac{1}{1+4+3}$
4	$\frac{1}{1+4+0}$	$\frac{1}{1+1+4}$	$\frac{1}{1+2+4}$	$\frac{1}{1+3+4}$	$\frac{1}{1+4+4}$
5	$\frac{1}{1+5+0}$	$\frac{1}{1+1+5}$	$\frac{1}{1+2+5}$	$\frac{1}{1+3+5}$	$\frac{1}{1+4+5}$
6	$\frac{1}{1+6+0}$	$\frac{1}{1+1+6}$	$\frac{1}{1+2+6}$	$\frac{1}{1+3+6}$	$\frac{1}{1+4+6}$
7	$\frac{1}{1+7+0}$	$\frac{1}{1+1+7}$	$\frac{1}{1+2+7}$	$\frac{1}{1+3+7}$	$\frac{1}{1+4+7}$

Aliæ etiam Tabulæ similiter construi possent, nimirum Potestatum Subpotestatum, & Subpotestatum-Subpotestatum: Item aliæ denique, in quibus omnia Signa Positiva in Privationes cedunt tam harum quam Tabularum etiam quæ pertineant ad Prop. 3.

Fatendum quidem est Rationes suprà memoratas omnes in Columnâ Lateralium productâ Secundâ hujus Tabulæ contineri, Serierum vero Dignitates, Compositionesque variæ hîc solum conspiciuntur,

quæ tandem in Laterales resolvuntur; nam $\frac{1}{1+2+2}$,

in Dignitatibus, $= \frac{1}{1+4}$ in Lateribus.

Cor. 1. Ergò si directæ seu transversæ Velocitatis Indices fuerint $m, m+k, m+k+f, m+k+f+g, k, f, g, h$ autem sumantur figillatim pro Indicibus Dimentio-

nis

nis cujuslibet Directæ seu Transversæ m , vel $m+k$, &c., in Secundâ Tabulâ erit Ratio Velocitatis Com-

positæ ad Rectangularem, ut $\frac{1}{1+m+k}, \frac{1}{1+m+k+f},$

$\frac{1}{1+m+k+f+g}, \frac{1}{1+m+k+f+g+l},$ & porro in infi-

nitum, vel $\frac{1+m+k}{1+m+k|q}, \frac{1+m+k+f}{1+m+k+f|q},$ &c. Item si

directæ seu transversæ Velocitatis Indices essent $m,$

$\frac{m}{k}, \frac{m}{k+f}, \frac{m}{k+f+g},$ Indices verò Dimensionis cujus-

vis ejusdem Velocitatis m , vel $\frac{m}{k},$ &c. dicantur

$k, f, g, l,$ juxta Tabulam primam erit Ratio Ve-

locitatis Compositæ ad Rectangularem ut $\frac{1}{1+m},$

$\frac{1}{1+\frac{m}{k}}, \frac{1}{1+\frac{m}{k+f}}, \frac{1}{1+\frac{m}{k+f+g}},$ &c. five ut $\frac{1}{1+m}, \frac{k}{k+m},$

$\frac{k+f}{k+f+m}, \frac{k+f+g}{k+f+g+m},$ &c.

Coroll. 2. Adeoque hinc innumeras planè Tabu-

las licet construere, nam singulæ potestates in ex-

positâ superius Progressione 1. 2. 3. 4. 5, &c. vel

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$ &c. si æternùm producat, totidem alias,

quot sunt ipsæ Dignitates, Tabulas harum similes

conficerent infinitè etiam continuatas, atque ex his

porro Novis Tabulis confectis singulis, tot nasce-

rentur aliæ, quot numerantur Dignitates, & pari-

ter in immensum.

Coroll. 3. Constat itaque Methodus, datâ Velo-

citâ Directâ seu Transversâ, ejusdem Dimensiona-

lis in eandem Dirigentem ad Velocitatem Rectan-

gularem, rationis inveniendæ, e. g. si Velocitas com-

posita sit ex simplici Arithmeticâ & ejusdem Pro-

gressione Cubicâ, erit ratio ad Rectangularem,

ut $\frac{1}{1+3}$, quærat jam ratio Dimensionalis Velocitatis, v. c. Quadraticæ in eandem Dirigentem, cujus Index est 1, ad Rectangularem, & per Coroll. I. erit ut $\frac{1}{1+3+2}$, si Subquadraticæ, ut $\frac{1}{1+3 \times \frac{1}{2}}$.

PROP. III.

Si Velocitates Perpendiculares, seu Dirigentes eandem, quam in præcedenti, sibi Arithmeticam asserant Progressionem, Directæ autem seu Transversæ vel Arithmeticam simplicem Reciprocam, vel Geometricam quamvis, quæ sit ut potestates ejus, Velocitates ex utrisque conflatae istam Rationem componunt ad Directas seu Transversas totidem Minimas, quam exprimerent Indices Dirigentium ad eosdem in consequente repetitos, si primùm subtrahantur Directarum Indices, sive quam Differentiæ Indicium ad earum Quadrata. Tabulæ nihil ferè discrepant à præmissis, exigitur enim solummodò Signorum mutatio, præfixorum Indicibus Directarum Velocitatum.

Adeoque Generalis Regula pro ratione inveniendâ Velocitatis Compositæ ad Rectangularem in Literali continebitur quantitate $\frac{1}{1-m}$, vel

$$\frac{1-m}{1-2m+m^2}, \text{ Sic } \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \&c. \text{ erit ad tot.}$$

$$\text{idem Minimas, ut } \frac{1}{1-1}; \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16},$$

$$\&c. \text{ ut } \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1}; \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27}, \&c. \text{ ut}$$

$$\frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2}, \&c.$$

PROP.

PROP. IV.

Si Velocitates Perpendiculares, Numerantesve sint Potestates quæcunque Transversarum seu Numeratarum, vel Numeratæ Numerantium, quomodo libet ipsas Dignitates minuas augeasve, siquidem earum Indices eandem inter se Progressionem sive Rationem servant atque tueantur, Compositarum Velocitatum Rationes ad Numeratas ultimas in Numerantes nullam prorsus exinde mutationem erunt

$$\text{subituræ, nempe } \frac{1}{1+1}, = \frac{2}{2+2}, = \frac{4}{4+4}; \frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \\ = \frac{2}{2+1}, = \frac{3}{3+\frac{1}{2}}, = \frac{4}{4+2}; \frac{1}{1+2+2}, = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}, \\ = \frac{2}{2+4+4}, \&c. \text{ pariter de Seriebus reciprocis,}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, = \frac{2}{2-1}, = \frac{4}{4-2}, = \frac{5}{5-\frac{1}{2}}; \frac{1}{1-\frac{1}{3}}, = \frac{5}{5-3}, \&c;$$

in iis etiam Seriebus reciprocis, quarum rationes in infinitum excurrunt, vel ipsam etiam transiliunt infinitionem, licet comprehensio certè difficilior sit, neque hîc tamen magis vacillat Propositio, nam

$$\frac{1}{1-1}, = \frac{2}{2-2}, = \frac{3}{3-3}, \text{ adeoque } \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, = \frac{2}{2-3}, \\ = \frac{4}{4-6}; \frac{1}{1-2-1}, = \frac{2}{2-4-2}, = \frac{4}{4-8-4}, \&c.$$

Coroll. Ergo, Datis Velocitatis Numerantis & Numeratæ Dignitatibus, eas facilè erit revocare ad alias quascunque non conjunctim, verum Sigillatim, sive Numerantis, sive Numeratæ Dignitates Datas, erit enim ut Velocitatis Index Numerantis datæ ad Numeratæ item datæ Indicem, sic Index datæ alterius Numerantis ad Indicem Quæsità Numeratæ, vel ut Index Numeratæ ad Numerantis Indicem, sic Index alterius Numeratæ datæ ad Numerantis Indicem Quæsità.

P R O P. V.

Si Velocitates Perpendiculares seu Dirigentes, perinde ac Transversæ vel Directæ, progrediantur in ratione Arithmetica Simplici, vel in Geometricâ quâlibet, quæ sit ut ejusdem potestates, Ratio Velocitatis Compositæ ad Directam Maximam in Dirigentem, *h. e.* ad Rectangularem, explicari potest per Indicem Dirigentis divisum per eundem, Directæ nempe Indice adauctum, vel per Quadratum Indicis Dirigentis unâ cum Rectangulo Indicis alterius in alterum, divisum per Quadratum summæ Indicum. Nam per Prop. 2. Coroll. 1. Regula erit

$\frac{1}{1+m}$, vel ut iisdem utamur literis, quas potius hic

visum est adhibere, $\frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{n}{n+m}$, adeoque per

Prop. præced. Velocitatum Indices sunt n & m , hæc

Directæ, illa Dirigentis, sed $\frac{n}{n+m} = \frac{n^2 + mn}{n^2 + 2mn + m^2}$.

Porrò eâdem argumentatione constat rationem Velocitatum Reciprocarum ad Rectangulares esse,

ut $\frac{n}{n-m}$, vel $\frac{n^2 - mn}{n^2 - 2mn + m^2}$.

P R O P. VI.

Si Velocitates Perpendiculares seu Dirigentes Progressionem obtineant quamlibet, sive Arithmetica simplicem, sive Geometricam, quæ sit ut ejusdem simplicis Potestates, Directæ autem seu Transversæ in earum Residuales se induant, Ratio Velocitatis Compositæ ad Directas Maximas in Dirigentes conficitur ex Indice Dirigentis, Diviso per eundem Indicem, cui adjiciatur Index Progressionis Arithmeticæ.

Velocita- tes Diri- gentes	Velocitates Residuales Directæ	Velocita- tis Com- positæ Ratio ad Rectangu- larem	Dirig. Refid. Direct.
a.	$R - a$	$\frac{1}{1 + 1}$	$a^2 \quad R^2 - a^2$
b.	$R - b$		$b^2 \quad R^2 - b^2$
c.	$R - c$		$c^2 \quad R^2 - c^2$
&c.	&c.		&c. &c.

Velocit. Compos.	Velocit. Residual. Dirig. Directæ	Velocit. Compos.
Ratio ad $\frac{2}{2 + 1}$	$\sqrt{(3)} a^4 \quad \sqrt{(3)} R^4 - \sqrt{(3)} a^4$	Ratio ad $\frac{4}{3 + 1}$
Rectan- gularem	$\sqrt{(3)} b^4 \quad \sqrt{(3)} R^4 - \sqrt{(3)} b^4$	Rectan- gularem
	$\sqrt{(3)} c^4 \quad \sqrt{(3)} R^4 - \sqrt{(3)} c^4$	

Quamcunque autem Seriem usurpemus, servatâ lege, in Propositione, latâ, idem prorsus erit affirmandum, adeoque generatim Ratio habebitur in quantitate $\frac{n}{n + 1}$, pro Seriebus Residualibus, sicut

antea $\frac{1}{1 + n}$ pro Seriebus illis, in quibus nulla esset

Subtractio. Reliquum est, ut ostendamus n esse Velocitatum Dirigentium Indicem, unitatem Directæ; ex Propositione itaque primâ constat omnem cujuscunque Figuræ Velocitatem in binas esse consumptam, quarum altera est Dirigens, Directa altera, vel altera Diametri, & Ordinatæ altera, adeoque, Velocitatis Compositæ ratione cognitâ ad Rectangularem, innotescunt etiam Velocitatum Singularum Indices; nam Velocitas saltem Dirigens exprimi possit per Unitatem Indicantem, Velocitatis verò Progressio $R^n - a^n$, &c. tota conferatur in Indicem x , sint Differentiæ, scilicet, sive Quantitates Residuales compactæ in Quantitates aliquas absolutas & incognitas; ergò per præcedentes Propositiones Recolligenda est Unitas in Rationis consequente, cui Velocitatis Residualis Index incognitus

tus x annectatur; & $\frac{1}{1+x} = \frac{1^n}{n+1}$, per Inductio-
nem præmissam, h. e. $x = \frac{1}{n}$, vel $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+x}$,
atque idè Indices Velocitatum singularum per
Prop. 4. & Coroll. n & 1; nam $1. \frac{1}{n} :: n. 1$. neque
quicquam in hâc ostensione desideratur, nisi du-
bium foret an $R^n - a^n$, &c. Progressio fuerit Di-
dimensionalis quævis Progressionis Arithmeticæ, quod
patebit si perpendamus Residualium Naturam, quæ
sunt reciproæ Dimensionalium Progressionum, ex
quibus nulla fit Subtractio; quamvis an $R^n - a^n$ sit
Arithmeticæ Progressionis Dimensionalis Progressio,
necne, nihil attinet, cum saltem per x incognitæ
Progressionis Indicem potest exprimi.

P R O P. VII.

Si Velocitates Perpendiculares seu Devehentes
Progressionem assumant quamlibet, sive Arithme-
ticam Simplicem, sive Geometricam, quæ sit ut e-
jusdem Simplicis potestates, Provectæ autem, seu
Transversæ se conferant in Residuales Provectarum
Dignitates vel Radices quasvis, Rationes Compo-
sitæ Velocitatis ad Rectangularem erunt consenta-
neæ iis, quas suprà memoravimus, nempe quarum
Antecedentes sint Indices Devehentis, Consequen-
tes autem augeantur Indicibus Dignitatum vel Ra-
dicum.

Velocit. Deveh.	Velocit. Provectæ	Devehentes,	Provectæ	Devehentes,	Provectæ.
$a^2.$	$\sqrt{R^2 - a^2}$	$a^3.$	$\sqrt{R^3 - a^3}$	$a^4.$	$\sqrt{R^4 - a^4}$
$b^2.$	$\sqrt{R^2 - b^2}$	$b^3.$	$\sqrt{R^3 - b^3}$	$b^4.$	$\sqrt{R^4 - b^4}$
$c^2.$	$\sqrt{R^2 - c^2}$	$c^3.$	$\sqrt{R^3 - c^3}$	$c^4.$	$\sqrt{R^4 - c^4}$
	&c.		&c.		&c. De-

Deveh.	Provectæ,	Deveh.	Provectæ,	Rationes
$a^2.$	$R^2 - a^2 \mid^7$	$a^3.$	$R^3 - a^3 \mid^7$	Compos.
$b^2.$	$R^2 - b^2 \mid^7$	$b^3.$	$R^3 - b^3 \mid^7$	Velocit.
$c^2.$	$R^2 - c^2 \mid^7$	$c^3.$	$R^3 - c^3 \mid^7$	ad Rect-
	&c.			angularé,

$$\frac{2}{2 + \frac{1}{2}}, \frac{3}{3 + \frac{1}{2}}, \frac{4}{4 + \frac{1}{2}}, \frac{2}{2 + 2}, \frac{3}{3 + 2}, \&c.$$

Nam in quâcunque hujusmodi Figurâ cujus Quadratura exquiritur, speciatim in Circulo, cum tot sint Numeratæ Residuæ $\sqrt{R^2 - a^2}$, $\sqrt{R^2 - b^2}$, $\sqrt{R^2 - c^2}$, &c. quot sunt puncta Numerantia in a^2 , b^2 , c^2 , &c. (aliter enim essent plura vel pauciora Quadrata, sive Rectangula Quadratis æqualia, quàm Radices, h. e. Radius aut Semidiameter major seipsâ foret vel minor, quod utrumlibet repugnat,) & prætereà cum per Prop. 6. Numerata Rectangula sortiantur puncta a^2 , b^2 , c^2 , &c. Numerantia, Quadrata Sinuum, per eandem Propositionem, in Serie residuali erunt ut Numeri Arithmetice naturaliterque ascendentes, Radii autem partes in ratione eorundem duplicatâ, & Radices ergò, ob dictam Dirigentis Velocitatis æqualitatem, & per Prop. 4. & Coroll. in Subquadruplicatâ Radii partium, quarum Progressio est item in ratione Simplici Arithmetica, vel Velocitas Composita erit ad Rectangularem, ut 1 ad $1 + \frac{1}{4}$, vel ut 4 ad 5. Adeoque tandem exhibetur, omni ævo investigata, Problematis Solutio, nimirum Circuli Quadratura, nam si spectemus Progressionem Velocitatum Radii & Ordinatæ, Circulus nequicquam est aliud, nisi Paraboloëides Biquadraticale, cujus Abscissa & Ordinata sunt æquales.

Quantam verò lucem attulerit hæc Doctrina Velocitatum Mathematicæ reconditori, quàm res arduas moliatur, quàm latè pateat, quisquam potest intelligere, qui perpenderit eadem operâ omnes

Resi-

Residuarum quantitatum Radices, cujuscunque Nominis, erui posse, earumque rationes ad totidem Maximas in eandem Abscissam Dirigentem, vel juxta eandem numeratas; neque de cæteris Quantitatibus, huc usque desperatis atque rationibus, dubitaverim, quin Mathesis æquè notas aliquando habuerit spectatasque, verùm hîc impræsentiarum consistamus, cum prius Rationes harumscæ quantitatum, in sequentem Tabulam conjectas, huic paginæ cumulavimus, ut cum *Wallisianis* conferantur, si fuerit lubitum.

	$\sqrt[4]{q}$	$\sqrt{c}$	$\sqrt{q}$	Æq.	Ref.	Quad.	Cub.	Biq.	Sur.	Q.cub.
$1 - 0$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$1 - a$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$
$1 - \sqrt{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{11}{1}$	$\frac{13}{1}$
$1 - \sqrt[3]{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{13}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{19}{1}$
$1 - \sqrt[4]{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{13}{1}$	$\frac{17}{1}$	$\frac{21}{1}$	$\frac{25}{1}$
$1 - \sqrt[5]{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{11}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{21}{1}$	$\frac{26}{1}$	$\frac{31}{1}$
$1 - \sqrt[6]{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{13}{1}$	$\frac{19}{1}$	$\frac{25}{1}$	$\frac{31}{1}$	$\frac{37}{1}$
$1 - \sqrt[7]{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{22}{1}$	$\frac{29}{1}$	$\frac{36}{1}$	$\frac{43}{1}$
$1 - \sqrt[8]{a}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{17}{1}$	$\frac{25}{1}$	$\frac{33}{1}$	$\frac{41}{1}$	$\frac{49}{1}$

Hæc progressio Naturalis est & luculenta, sique nihil præterea habuissimus, quod opponeremus *Wallisiana*, hoc saltem nobis esset præstò, quòd hæc Tabula ad verisimilitudinem videatur propensior; nonne enim est instar prodigii, ut cum adeò tardè quasi & pedetentim crescant Consequentes primæ Residuæ $R - a$ ejusque Dignitatum, reliquæ protinus in tantos tamque monstrosos progressus evolverent? ubi nostra est ratio $\frac{1}{49}$, *Wallisiana* collegit

sub unitate 3003, Prop. 132, Arith. Inf. mirum discrimen! nec difficile est ex iis, quæ prædiximus, perspicere unde oriatur istud tam immane Ra-

Rationis Delirium, quod utrinque diducitur, quo remotior sit potestas à residuis, Residuæque ab $R - a$.

Nemo autem non videt ex hâc Doctrinâ nihil opus esse intercalationibus, neque quicquam rei esse cum unciis, quandoquidem æquè expediuntur, in Tabulâ, Radicum quarumcunque Residuârum rationes, ac Dignitatum, imò & ipsas Tabulas; Unciasque, quas imperant intercalandas, perquàm fallaces, esse, nec tam erroribus benè multis obfuscatas, quàm confitas iisdem atque obductas; si quid verò in hâc Geometriâ præstitum sit magis vendibile, si minùs Doctorum gratiam meruerim, saltem, uti spero, erogabunt, neque enim, postquam Numen summâ & contentissimâ Pietate sumus venerati, & Amicos Cognationemque appellavimus, mihi semper charissimos, quicquam aliud nostram curam exercet, quàm ut Eruditis placeamus.

Cùm autem Unciarum mentionem fecimus, hìc solummodò Regulam annectemus, quâ omnes Unciæ potestatum Integralium inveniri possint, Fractionales non item, unde subest causa cur de Regulâ *Newtonianâ* dubitemus.

Illius Regula est $1 \times \frac{m-0}{1}, \frac{\times m-1}{2}, \frac{\times m-2}{3},$

$\frac{\times m-3}{4},$ &c. nostra verò pro Sextâ Potestate est

hujusmodi, $1 \times \frac{m-0}{m-5}, \frac{\times m-1}{m-4}, \frac{\times m-2}{m-3}, \frac{\times m-3}{m-2},$

$\frac{\times m-4}{m-1}, \frac{\times m-5}{m-0}, \frac{\times m-m}{1},$ ita ut Numerato-

rum Progressio sit Denominatorum Reciproca; & quod de Sextâ potestate valet, ad Quadraticam, Cubicam, vel quamvis aliam etiam potest applicari, si Progressio instituaturs ad exemplum, adcoque Series Unciarum pro Radice Quadraticâ erit

$1 \times$

$1 \times \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2} - \infty + 1}, \frac{\times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - \infty + 2}, \&c.$ Sumendo ∞ pro
 Numero Infinito, ex quâ nunquam evocabitur Se-
 ries *Newtoniana*, i. $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$,
 &c.

P R O P. VIII.

De Hyperbolæ Quadraturâ, &c.

De Hâc porrò Figurâ quædam apud nos Scripta
 Manent, verùm ea in aliud Tempus Distulimus,
 donec saltem constiterit, annon in Antegressis etiam
 Hallucinemur.



E I N I S.

BOOKS Printed for, and Sold by
EDMUND JEFFERY, Bookseller in
Cambridge.

AN Answer to the Dissenters Pleas for Separation,
or an Abridgment of the London Cases; where-
in the Substance of those Books is digested into one short
and plain Discourse. The Fourth Edition.

A Confutation of Popery, in Three Parts. Wherein I. The Controversy concerning the Rule of Faith is determin'd. II. The particular Doctrines of the Church of Rome are confuted. III. The Popish Objections against the Church of England are Answer'd. The Third Edition.

A Discourse of Schism; shewing, I. What is meant by Schism. II. That Schism is a Damnable Sin. III. That there is a Schism between the Establish'd Church of England, and the Dissenters. IV. That this Schism is to be charged on the Dissenters side. V. That the Modern Pretensions of Toleration, Agreement in Fundamentals, &c. will not excuse the Dissenters from being guilty of Schism. Written by way of Letter to three Dissenting Ministers in Essex, viz. Mr. Gilson, and Mr. Gledhill of Colchester, and Mr. Shepherd of Braintree. To which is annexed, An Answer to a Book intituled Thomas against Bennet, or the Protestant Dissenters Vindicated from the Charge of Schism. The Third Edition.

A Defence of the Discourse of Schism, in Answer to those Objections which Mr. Shepherd has made in his three Sermons of Separation, &c. The Second Edition.

An Answer to Mr. Shepherd's Considerations of the Defence of the Discourse of Schism. The 2^d Edition.

*A Confutation of Quakerism; or a plain Proof of the Falshood of what the principal Quaker Writers (especially Mr. R. Barclay in his Apology and other Works) do teach concerning the Necessity of Immediate Revelation, in order to a Saving Christian Faith; the Being,
Nature*

p.
Nature and Operation of the pretended Universal Light within; its striving with Men, moving them to Prayer, and calling them to the Ministry, Regeneration, Sanctification, Justification, Salvation and Union with God; the Nature of a Church; the Rule of Faith; Water-Baptism, and the Lord's Supper. Divers Questions also concerning Perfection, Christ's Satisfaction, the Judge of Controversies, &c. are briefly stated and resolved. The Second Edition.

Devotions: viz. Confessions, Petitions, Intercessions and Thanksgivings, for every Day of the Week: And also before, at, and after the Sacrament; with occasional Prayers for all persons whatsoever.

A Brief History of the joint use of precompos'd set Forms of Prayer; shewing, 1. That the ancient Jews, our Savior, his Apostles, and the primitive Christians, never join'd in any Prayers, but precompos'd set Forms only. 2. That those precompos'd set Forms in which they join'd, were such as the respective Congregations were accustomed to, and thoroughly acquainted with. 3. That their Practice warrants the Imposition of a National precompos'd Liturgy. To which is annexed, A Discourse of the Gift of Prayer, shewing that what the Dissenters mean by the Gift of Prayer, viz. a Faculty of Conceiving Prayers Extempore, is not promised in Scripture.

A Paraphrase with Annotations upon the Book of Common Prayer, wherein the Text is explain'd, Objections are answer'd, and Advice is humbly offer'd both to the Clergy and Laity, for promoting true Devotion in the Use of it. The Second Edition.

All by the same Author.